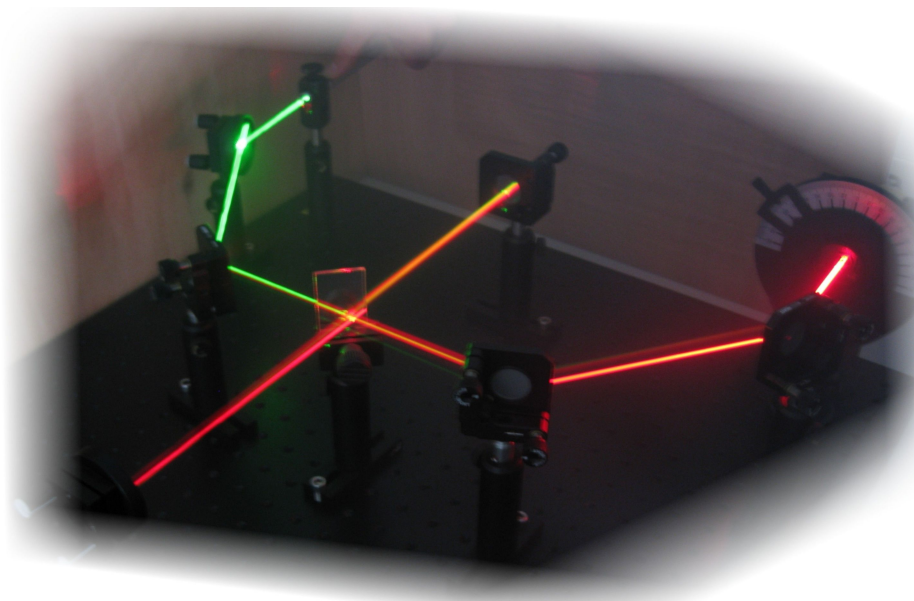


PSI

die

Physik–Schülerlabor-Initiative



Das Spektrometer

Version ohne eingebettete Animationen

1 Einleitung

Die Beobachtung, dass weißes Licht eine Überlagerung aller Frequenzen der sichtbaren Strahlung ist, war ein wichtiger Schritt hin zur modernen Optik.

Für die Spektralzerlegung des Lichts ist ein dispersives Element, also ein Prisma oder ein Gitter notwendig, es ist das zentrale Bauteil jedes Spektroskops.

Spektroskopische Beobachtungen trugen entscheidend zum Verständnis des Atom- und Molekülaufbaus bei und gaben damit wichtige Impulse bei der Entwicklung der Quantenmechanik.

Auch in der modernen Physik und Chemie sowie in der Technik sind Spektrometer wichtige Werkzeuge. Jedes dieser Anwendungsgebiete stellt andere Anforderungen an das zu benutzende Spektrometer, daher ist es wichtig zu verstehen, welche Aufgaben die einzelnen optischen Komponenten eines Spektrometers erfüllen.

Im Schülerlabor ist ein Spektrometer in der so genannten Czerny-Turner Anordnung aufgebaut, dieses lässt eine große Dimensionierung zu und ist damit optimal zum Experimentieren mit den verschiedenen Komponenten geeignet.

Nachdem das Prinzip eines Spektrometers verstanden ist, stellt auch ein kommerzielles Spektrometer keine Blackbox mehr da.

Daher steht auch ein solches Spektrometer zur Verfügung, welches aufgrund seiner Kompaktheit bestens für verschiedenste Experimente geeignet ist, an einem Notebook können sofort die Spektren verschiedener Lichtquellen betrachtet werden.

Zunächst wird nun der Aufbau des Eigenbau-Spektrometers vorgestellt.

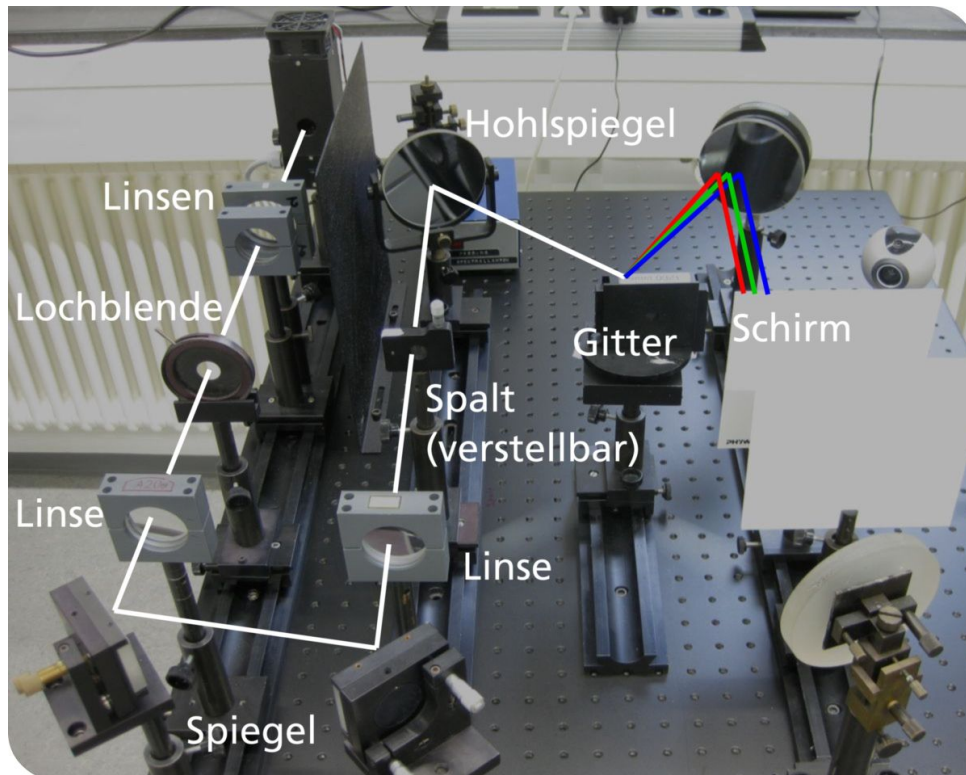
2 Das Eigenbau-Spektrometer

Das Spektrometer ist so konzipiert, dass die Schüler das Spektrometer selbst aufbauen können, prinzipiell stehen für den Aufbau des Spektrometers folgende Komponenten zur Verfügung:

- verschiedene Lichtquellen,
- ein verstellbarer Spalt,
- sphärische Hohlspiegel,
- eine drehbare Halterung für verschiedene Gitter,
- Beobachtungsschirme.

Darüber hinaus stehen noch mehrere Linsen, Spiegel und Blenden zur Verfügung, welche für die Lichteinkopplung benötigt werden, diese spielt eine wichtige Rolle, da das Gitter optimal ausgeleuchtet sein muss.

Da sich all diese Komponenten auf optischen Bänken befinden und z.B. auch die Spaltbreite einstellbar ist, kann der Einfluss jeder Komponente untersucht werden.



Animation 1: Aufbau des Spektrometers

Nachdem alle Komponenten ihren richtigen Platz haben und die richtigen Einstellungen gefunden worden sind, kann man auf dem Beobachtungsschirm ein Spektrum erkennen.

In der Forschung bzw. Technik wird der Schirm meist durch einen Photodetektor ersetzt, sodass das Spektrum elektronisch ausgewertet werden kann.

Im Rahmen des Schülerlabors soll aber das Spektrum visuell erfahrbar sein, da ein solches Spektrum viel eindrucksvoller ist, als eine Auftragung der Intensität gegen die Wellenlänge am Bildschirm.

Für weitergehende Versuche steht aber auch eine Webcam zur Verfügung, mit der sich das visuelle Spektrum in den Computer übertragen lässt, wo es dann mit einer Software ausgemessen werden kann.

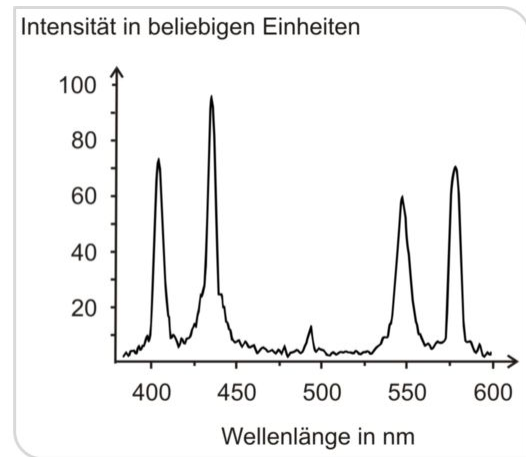
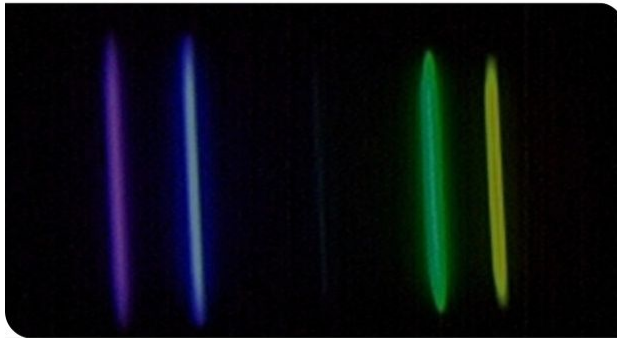


Abbildung 1: links: Photographie der Spektrallinien von Quecksilber, rechts: quantitative Auswertung mit dem Computer

Im Folgenden werden nun mögliche Versuche vorgestellt, mit denen die Einflüsse der einzelnen Komponenten auf das Spektrum gezeigt werden können.

3 Mögliche Versuche

Wichtige Kenngrößen eines Spektrometers sind

- sein spektrales Auflösungsvermögen, also die Fähigkeit, eng benachbarte Wellenlängen trennen zu können,
- die Intensität des Spektrums. Ist diese zu gering, kann das Spektrum nicht mehr wahrgenommen werden.

Folgende Einflüsse auf diese Größen können untersucht werden:

- Einfluss des Gitters (genauer der Gitterkonstante) auf das Auflösungsvermögen,
- Einfluss des Gitters auf die Intensität des Spektrums,
- Einfluss der Spaltbreite auf das Auflösungsvermögen,
- Einfluss der Spaltbreite auf die Intensität.

Da die Spektralzerlegung auf der Beugung an einem Gitter beruht, spielt auch die Ordnung, in welcher gemessen wird, eine Rolle, auch dieser Einfluss kann untersucht werden.

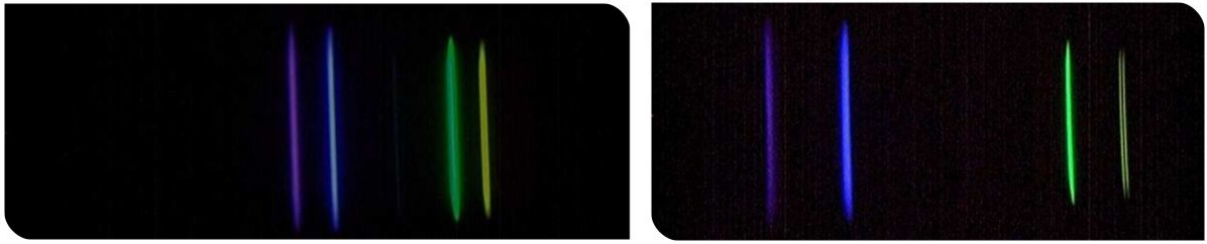


Abbildung 2: Einfluss der Gitterkonstante: Bei Benutzung eines Gitters mit $g = 600$ Strichen pro Millimeter (linkes Bild) können die beiden gelben Spektrallinien nicht getrennt werden. Verwendet man hingegen ein Gitters mit $g = 1200$ Strichen pro Millimeter (rechtes Bild) könne sie aufgelöst werden.

Im Folgenden werden nun die Grundlagen erarbeitet, die für das Verständnis des Spektrometers von Bedeutung sind.

Zunächst werden anhand des Doppelspalts einige Grundlagen wiederholt, die für das Verständnis von Interferenzmustern wichtig sind.

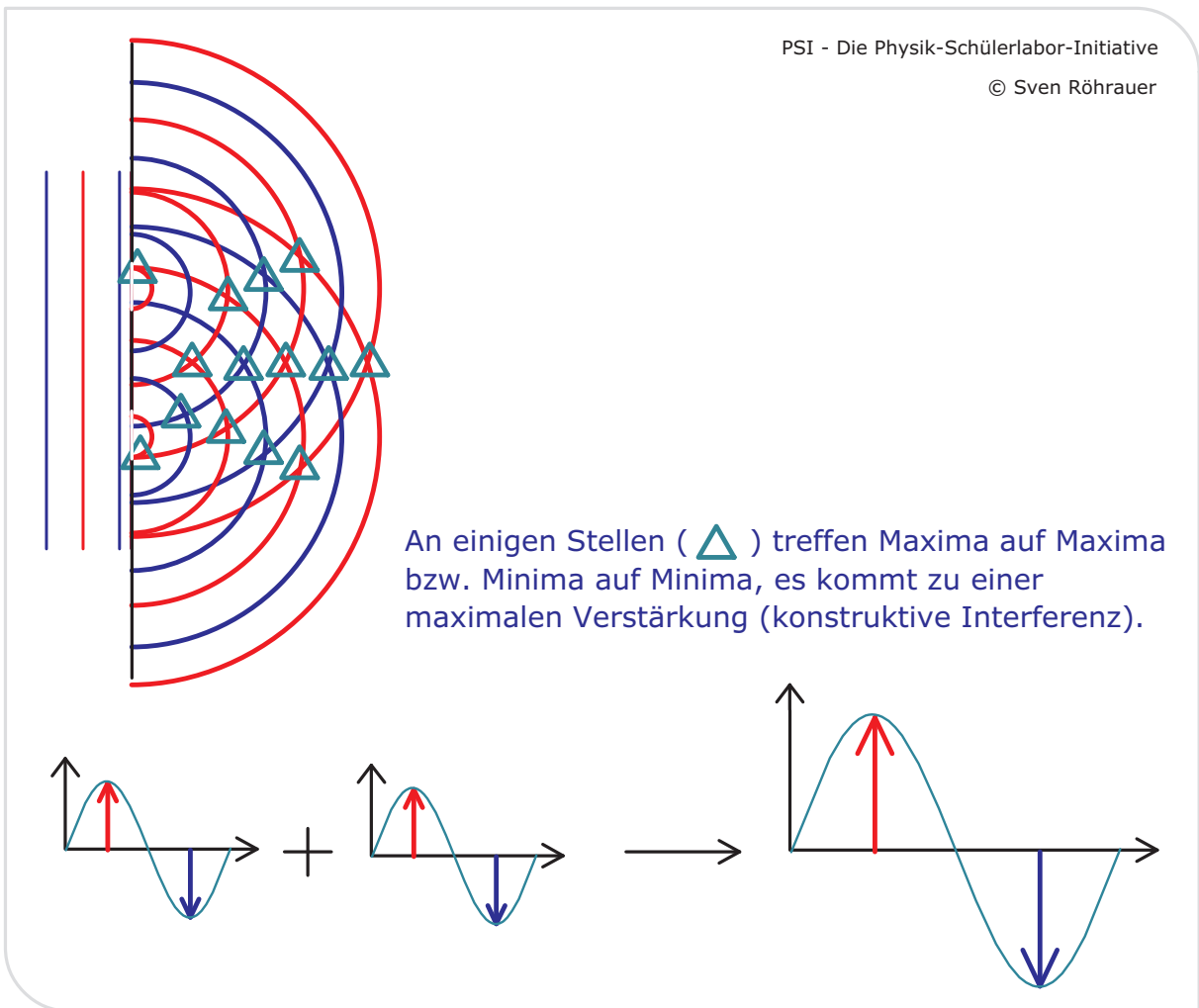
Danach wird untersucht, was sich ändert, wenn ein weiterer Spalt hinzukommt, also ein Dreifachspalt vorliegt. Zum Schluss werden die gefundenen Erkenntnisse auf ein Gitter mit N Spalten verallgemeinert.

4 Der Doppelspalt

4.1 Anwendung des Huygensschen Prinzips auf den Doppelspalt

Nach dem Huygensschen Prinzip (siehe Abschnitt L 7) stellen die zwei Spalte eines Doppelspalts jeweils eine Quelle für Elementarwellen dar.

Die beiden Elementarwellen breiten sich hinter dem Doppelspalt aus und überlagern sich dabei, es kommt zu konstruktiver und destruktiver Interferenz, wie folgende Animation zeigt (rote Linien stellen Wellenberge, blaue Linien Wellentäler dar).



Animation 2: Anwendung des Huygensschen Prinzips auf den Doppelspalt

4.2 Stellen der Extrema

Indem man einen Beobachtungsschirm hinter den Doppelspalt hält, kann leicht festgestellt werden, an welchen Stellen es zu maximal konstruktiver bzw. minimaler Interferenz kommt.

Diese Stellen können jedoch auch berechnet werden, man muss dabei zwei Fälle unterscheiden, einerseits die Fresnel'sche Betrachtungsweise und andererseits die Fraunhofer'sche Betrachtungsweise.

Die Fresnel'sche Betrachtungsweise verwendet man, wenn

- der Abstand b zwischen Doppelspalt (Spaltabstand g) und Schirm sehr klein ist,

- der Abstand zwischen Lichtquelle und Doppelspalt klein ist (in diesem Fall kann man nicht mehr sagen, dass eine ebene Wellenfront auf den Doppelspalt trifft),
- mathematisch formuliert: $g^2 \geq \lambda \cdot b$

Die Fraunhofer'sche Betrachtungsweise verwendet man, wenn

- der Abstand b zwischen Doppelspalt (Spaltabstand g) und Schirm sehr groß ist,
- der Abstand zwischen Lichtquelle und Doppelspalt groß ist,
- mathematisch formuliert: $g^2 \ll \lambda \cdot b$

Im normalen Doppelspaltexperiment wählt man also die Fraunhofer'sche Betrachtungsweise, in diesem Fall ist das Muster leicht berechenbar.

Da der Abstand vom Schirm zum Gitter im Vergleich zum Spaltabstand sehr groß ist, können zwei sich überlagernde Wellenzüge als parallel zueinander betrachtet werden, wie es folgendes Schema zeigt.

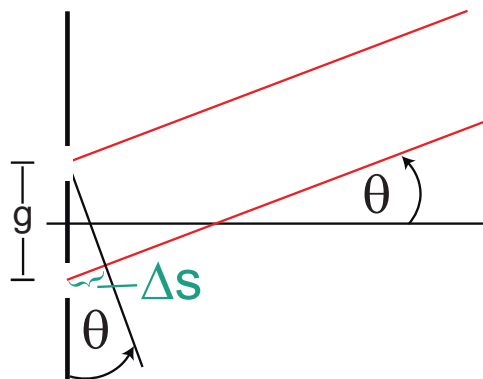


Abbildung 3: Zur Herleitung der Stellen der Extrema am Doppelspalt.

Der Gangunterschied Δs zwischen den beiden Wellenzügen ergibt sich aus folgender trigonometrischen Beziehung

$$\Delta s = g \cdot \sin \theta \quad (1)$$

Für maximale Verstärkung muss dieser Gangunterschied gerade ein Vielfaches der Wellenlänge sein, da dann der Phasenunterschied zwischen den zwei Wellen gerade 0° (oder 360°) ist, man findet also dann ein Maxima, wenn gilt:

$$\text{Maxima: } \Delta s = g \cdot \sin \theta_m = m \cdot \lambda \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Entsprechend findet man Minima, wenn ein Wellenberg auf ein Wellental trifft (der Phasenunterschied ist dann gerade 180°), also

$$\text{Minima: } \Delta s = g \cdot \sin \theta_m = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Auf dem Schirm findet man demnach im Abstand d_m zum Schirmmittelpunkt Extrema

$$d_m = b \cdot \tan \theta_m \quad (4)$$

Da der Winkel θ klein ist, gilt die Näherung $\tan \theta = \theta$, d.h. die Maxima sind äquidistant.

Mit einer genaueren Betrachtung kann die exakte Intensitätsverteilung hergeleitet werden:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin(\theta) \right)}{\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin(\theta)} \right)^2 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi \cdot g}{\lambda} \sin(\theta) \right) \right)^2 \quad (5)$$

Oder graphisch aufgetragen:

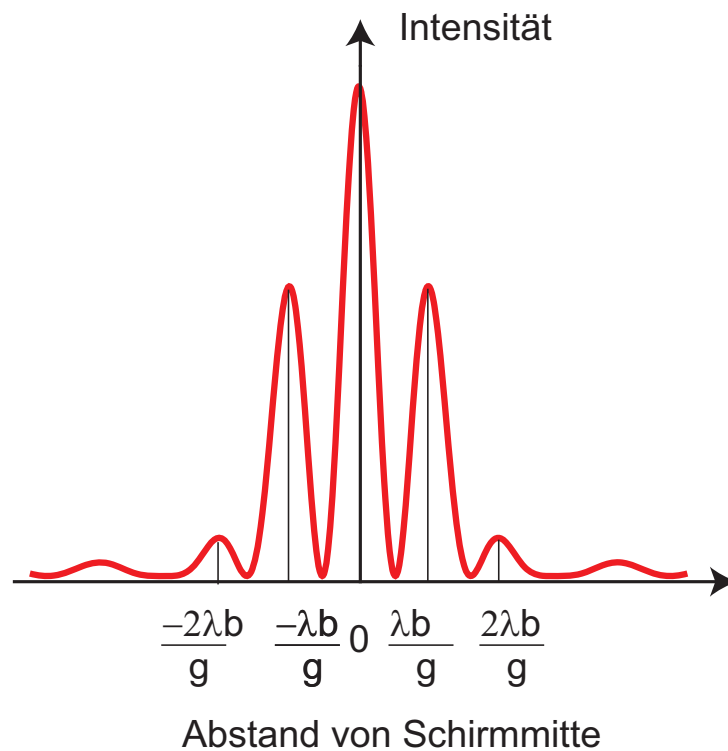


Abbildung 4: Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt

Man erkennt, dass die Lage der Maxima wellenlängenabhängig ist, d.h. der Doppelspalt ist auch eine „Art dispersives Element“.

Am Dreifachspalt wird nun untersucht, welche Vorteile ein Gitter als dispersives Element statt eines Doppelspalts bringt.

5 Der Dreifachspalt

Nach der Betrachtung des Doppelspalts wird nun gezeigt, wie sich eine Erhöhung der Anzahl von Spalten auswirkt. Dazu wird zunächst der Dreifachspalt untersucht und dabei die Verwendung von Zeigerdiagrammen (siehe dazu auch Abschnitt [L 8](#)) eingeführt, die gewonnen Erkenntnisse können anschließend leicht auf einen Mehrfachspalt mit N Spalten verallgemeinert werden.

Damit kann verstanden werden, was das besondere an einem Gitter, also einem Mehrfachspalt mit einer sehr großen Anzahl an Spalten, ist.

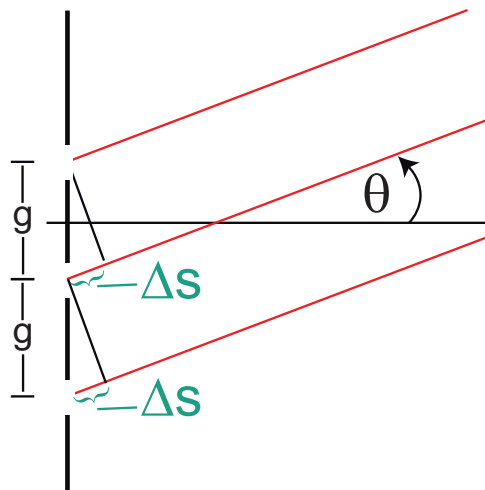


Abbildung 5: Zur Herleitung der Stellen der Extrema am Dreifachspalt.

Beim Doppelspalt interferierten die zwei Wellenzüge genau dann maximal, wenn der Phasenunterschied gerade 0° war, oder anders ausgedrückt, an Orten, wo der Gangunterschied zwischen den beiden Wellen gerade ein Vielfaches der Wellenlänge war.

Beim Dreifachspalt ist das genau so: Um maximale Interferenz zu beobachten, muss die Phasendifferenz zwischen dem ersten und zweiten sowie dem zweiten und dritten Strahl 0 sein, der Dreifachspalt hat seine Maxima an der selben Stelle, allerdings haben sie eine höhere Intensität, da an diesen Stellen ja drei (statt zwei beim Doppelspalt) Wellenzüge interferieren.

Dies soll auch noch mit Hilfe von Zeigern (siehe Zeigerdiagramme, Abschnitt [L 8](#)) dargestellt werden.

5.1 Zeigerdiagramm für relative Phasendifferenz 0°

Die roten Zeiger stellen die Ausgangsamplitude (des elektrischen Feldes) dar, sie werden dem Phasenwinkel entsprechend aneinander gelegt, durch Vektoraddition erhält man die resultierende Amplitude (in grün dargestellt).

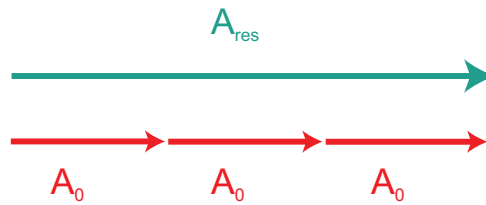


Abbildung 6: Zeigerdiagramm $\Delta\varphi = 0$

Die Intensität ist gerade das Quadrat der Amplitude, d.h. die relative Intensität beim Dreifachspalt ist

$$I = A_{res}^2 = (3A_0)^2 = 9A_0^2 \quad (6)$$

Im Vergleich hierzu ist die relative Intensität beim Doppelspalt

$$I = A_{res}^2 = (2A_0)^2 = 4A_0^2 \quad (7)$$

Zurück zum Dreifachspalt: Was passiert, wenn die Phasendifferenz zwischen den Wellenzügen nicht gerade 0 ist, d.h. der Gangunterschied nicht ein Vielfaches der Wellenlänge ist?

Untersuchen wir mit Hilfe der Zeigerdiagramme für verschiedene Phasendifferenzen, wie groß die resultierende Amplitude ist.

5.2 Zeigerdiagramm für relative Phasendifferenz 180°

Die Zeiger müssen im Winkel von 180° aneinander gelegt werden, also:

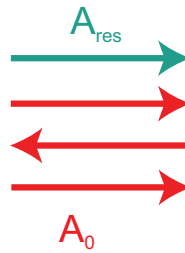


Abbildung 7: Zeigerdiagramm $\Delta\varphi = \pi$

Die Zeiger löschen sich nicht ganz aus, d.h. an diese Stelle fällt Licht. Variieren wir die Phasendifferenz minimal nach oben oder nach unten, wird A_{res} kleiner, bei $\Delta\varphi = \pi$ ist also ein so genanntes Nebenmaximum, dieses hat aber nur $1/9$ der relativen Intensität im Vergleich zum Hauptmaximum.

Zwischen zwei Maxima muss sich ein Minimum befinden, wo ist dieses? Versuchen wir es mit $\Delta\varphi = \frac{1}{3}\pi$

5.3 Zeigerdiagramm für relative Phasendifferenz 60°

Die Zeiger müssen im Winkel von 60° aneinander gelegt werden, also

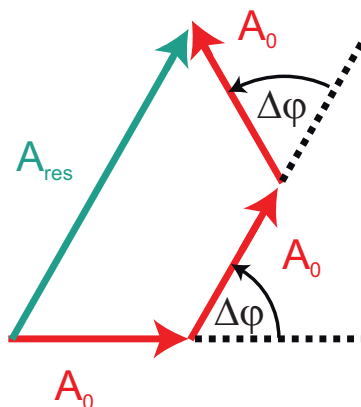


Abbildung 8: Zeigerdiagramm $\Delta\varphi = 1/3\pi$

Wir erhalten eine resultierende Amplitude, die zwischen der von Haupt- bzw. Nebenmaxima liegt. Probieren wir als nächstes $\Delta\varphi = 2/3\pi$

5.4 Zeigerdiagramm für relative Phasendifferenz 120°

Die Zeiger müssen im Winkel von 120° aneinander gelegt werden, also

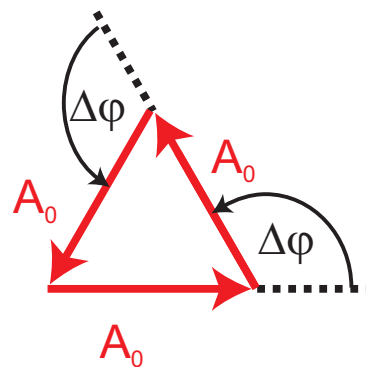


Abbildung 9: Zeigerdiagramm $\Delta\varphi = 2/3\pi$

Wir drehen uns im Kreis – oder anders ausgedrückt, die resultierende Amplitude ist 0, d.h. wir haben ein Minimum gefunden.

5.5 Lage des ersten Minimums

Die Lage des Minimums auf dem Schirm kann leicht aus dem Gangunterschied und damit aus der Phasendifferenz ermittelt werden. Wir wissen, dass gilt

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\lambda} \cdot 2\pi \quad (8)$$

und

$$\Delta s = g \cdot \sin \theta \quad (9)$$

Die Lage dieses Minimums berechnet sich also zu

$$\theta = \arcsin \left(\frac{\lambda}{g} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) \quad (10)$$

Vergleichen wir nun die Lage des ersten Minimums beim Dreifachspalt mit dem des Doppelspalts.

Wir nehmen dazu an, dass sowohl ein Doppel- und Dreifachspalt mit rotem Laserlicht der Wellenlänge 600 nm beleuchtet wird und weiterhin, dass der Spaltabstand bei Doppel- und Dreifachspalt der gleiche ist, nämlich $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Für den Dreifachspalt war das erste Minimum bei $\Delta\varphi = 2/3\pi$, also

$$\theta = \arcsin\left(\frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ m}} \cdot \frac{2/3\pi}{2\pi}\right) = 0,04^\circ \quad (11)$$

Für den Doppelspalt war das erste Minimum bei $\Delta\varphi = \pi$, also

$$\theta = \arcsin\left(\frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ m}} \cdot \frac{\pi}{2\pi}\right) = 0,06^\circ \quad (12)$$

Beim Dreifachspalt liegt das erste Minimum also näher bei Hauptmaximum, d.h. das Hauptmaximum erscheint schärfer.

Dies ist auch deutlich an der berechneten Intensitätsverteilung zu erkennen:

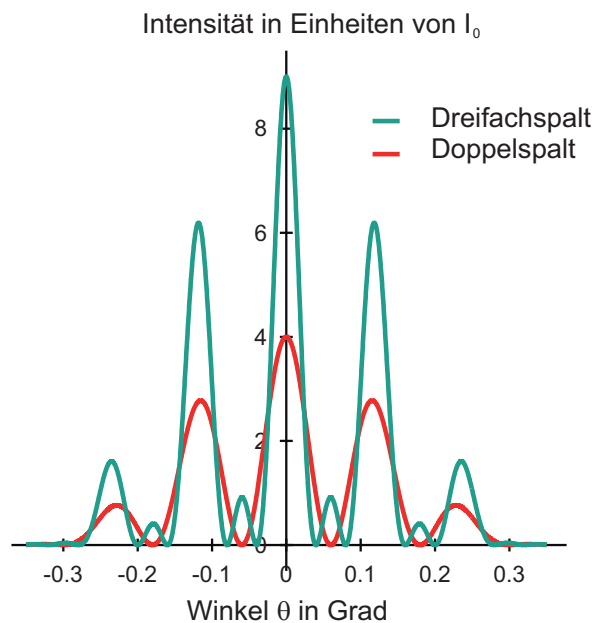


Abbildung 10: Vergleich von Doppel- bzw. Dreifachspalt.

Man erkennt folgendes:

- die Lage der Hauptmaxima ist beim Doppel- und Dreifachspalt dieselbe,
- die Intensität beim Dreifachspalt ist höher, da ja drei Strahlen interferieren,

- beim Dreifachspalt liegt zwischen dem 0. Hauptmaximum und dem ersten Hauptmaximum ein Nebenmaximum, dadurch rückt auch das erste Minimum näher an das 0. Hauptmaximum, dieses ist daher schärfer.

Im nächsten Abschnitt wird das optische Gitter behandelt und die oben gewonnenen Erkenntnisse auf einen Mehrfachspalt mit N Spalten, Gitter genannt, erweitert.

6 Das optische Gitter

Nun sollen die beim Übergang vom Doppel- zum Dreifachspalt gewonnenen Erkenntnisse auf N Spalte verallgemeinert werden. Anhand der folgenden Intensitätsverteilungen der Mehrfachspalte mit $N = 3, 4$ und 5 werden nun allgemeine Aussagen über optische Gitter anschaulich gemacht.

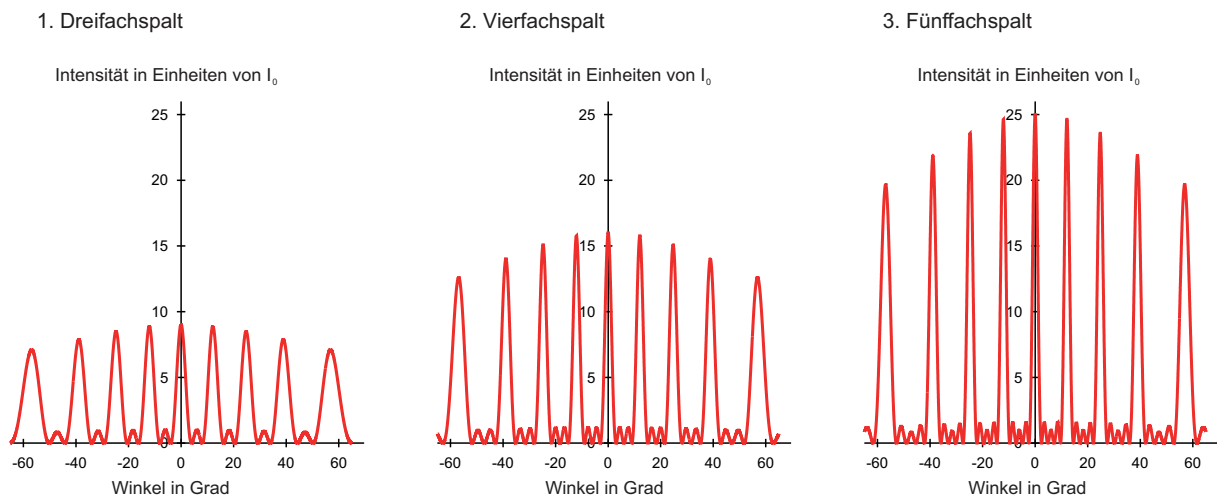


Abbildung 11: Vergleich von Doppel- bzw. Dreifachspalt.

Aussage 1

Das Interferenzmuster von Gittern ist viel heller als das von einem Doppelspalt, weil sich mehr Strahlen überlagern können. Wenn A_0 die Amplitude eines Strahls von einem Spalt ist, so ist die Intensität des 0. Hauptmaximums eines Gitters mit N Spalten

$$I(\theta = 0) = N^2 \cdot I_0 \quad (13)$$

Aussage 2

Damit alle N Strahlen maximal konstruktiv interferieren können, muss der relative Gangunterschied zwischen ihnen jeweils ein Vielfaches der Wellenlänge sein, diese Helligkeitsmaxima sind unter den Winkeln θ_m zu finden, diese sind durch die Gittergleichung gegeben

$$\sin \theta_m = \frac{m \cdot \lambda}{g} \quad (14)$$

Aussage 3

Zwischen den Hauptmaxima liegen $N - 2$ Nebenmaxima mit einer sehr viel geringeren Intensität.

Aussage 4

Zwischen zwei Hauptmaxima liegen $N - 1$ Minima, das erste Minimum liegt also sehr nahe am jeweiligen Hauptmaximum, damit ist dieses sehr scharf.

Zur Erläuterung betrachten wir ein Gitter mit $N=100$ Spalten.

Das Maximum k -ter Ordnung liegt dann vor, wenn der Gangunterschied

$$\Delta s = m \cdot \lambda \quad (15)$$

beträgt.

Direkt daneben, bei einem Gangunterschied von

$$\Delta s = m \cdot \lambda + \frac{\lambda}{100} \quad (16)$$

löschen sich alle Strahlen aus: und zwar die vom 1. und 51., die vom 2. und 52., ..., die vom 50. und 100. Spalt.

In einer Formel verallgemeinert: Das erste Minimum nach einem Maximum k -ter Ordnung ist dort zu finden, wo der Gangunterschied

$$\Delta s = m \cdot \lambda + \frac{\lambda}{N} \quad (17)$$

beträgt.

L 7 Das Huygenssche Prinzip

Nach dem Huygensschen Prinzip kann jeder Punkt einer Wellenfront (also einer Fläche gleicher Phase) als Ausgangspunkt einer elementaren Kugelwelle (auch Elementarwelle genannt) aufgefasst werden.

Diese Sekundärwelle bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit und hat die gleiche Frequenz und Phase wie die Primärwelle. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront (der Primärwelle) zu einem späteren Zeitpunkt.

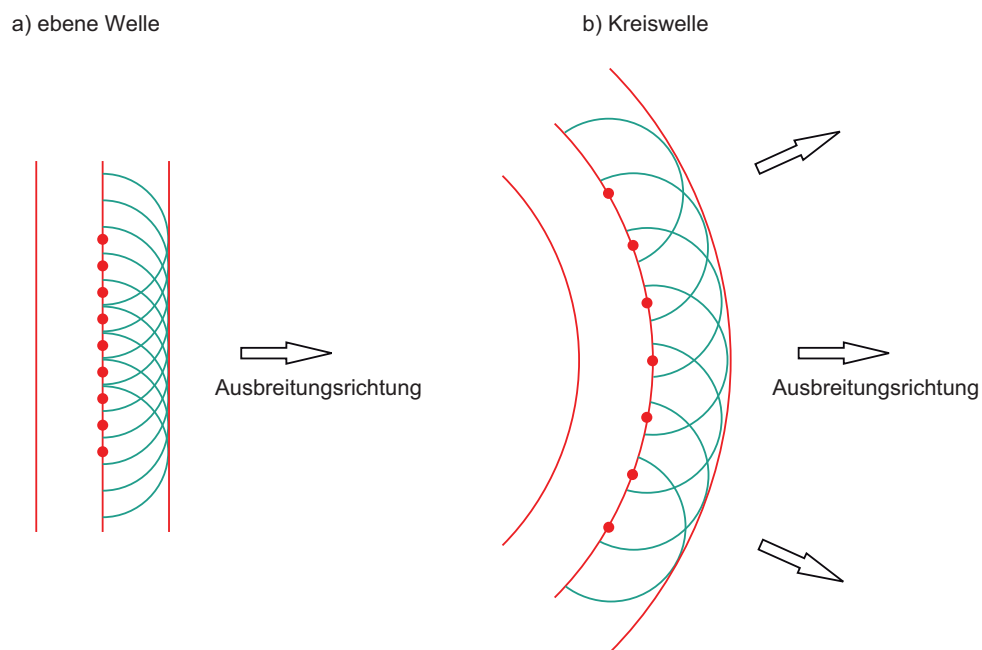
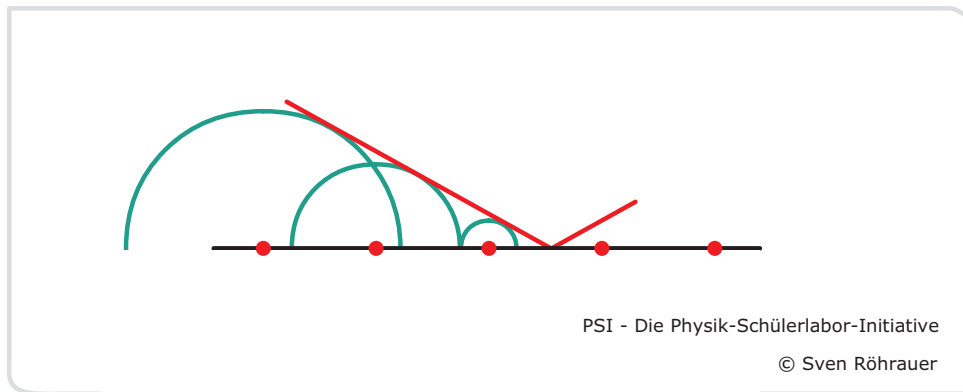


Abbildung 12: Das Huygenssche Prinzip am Beispiel a) einer ebenen Welle und b) einer Kreiswelle

Huygens konnte damit die Winkel der Reflexion und der Brechung von Licht an einer Grenzfläche zwischen zwei optisch unterschiedlich dichten Medien erklären.



Animation 3: Mit dem Huygensschen Prinzip kann man die Reflexion von Licht beschreiben.

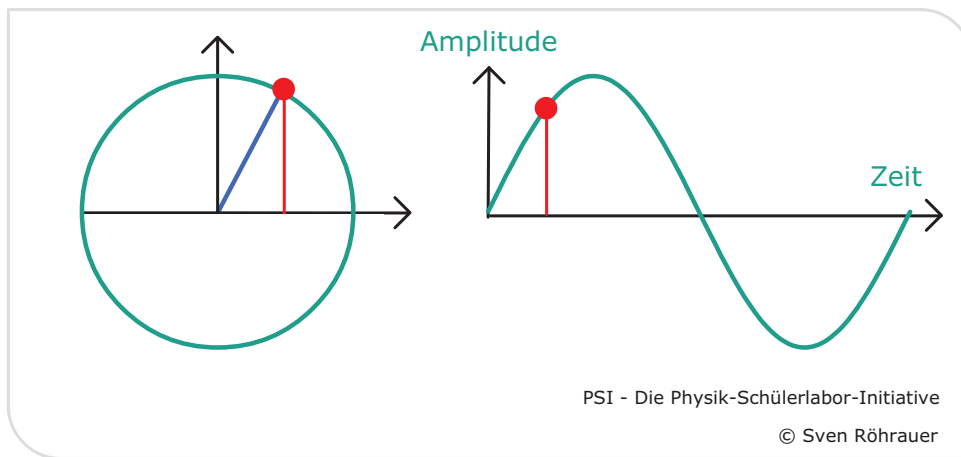
L 7.1 Erweiterung durch Fresnel

Fresnel erklärte mit dem Huygensschen Prinzip Phänomene der Interferenz und der Beugung.

L 8 Zeigerdiagramme

Zeigerdiagramme sind nützliche Werkzeuge in der Schwingungslehre. Auch im Bezug auf die Erklärung der Interferenzmuster bei Mehrfachspalten sind sie hilfreich, da mit ihnen die Phasenbeziehungen zwischen zwei Wellen veranschaulicht werden können.

Die folgende Animation zeigt, dass sich eine sinusförmige Schwingung (zum Beispiel die eines Körpers an einem Federpendel) als Projektion einer Kreisbewegung darstellen lässt.



Animation 4: Zeigerdiagramm am Beispiel einer Schwingung

Die Funktionsgleichung der Schwingung sei

$$A(t) = \hat{A} \cdot \sin(\omega t) \quad (18)$$

man erkennt dabei im Zeigerdiagramm folgendes:

- der Zeiger (blau) hat gerade die Länge \hat{A} , was der maximalen Amplitude entspricht,
- der Zeiger dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω ,
- der Winkel zwischen Zeiger und der horizontalen Achse ist durch $\varphi = \omega t$ gegeben,
- Die Länge der Vertikalen (grün eingezeichnet) ist dann gerade der Funktionswert, also die Amplitude zu einer gegebenen Zeit.

Die Phase φ kann in Grad oder im Bogenmaß angegeben werden, also z.B.

$$\varphi_1 = 45^\circ = \frac{1}{4} \cdot \pi$$

$$\varphi_2 = 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot \pi$$

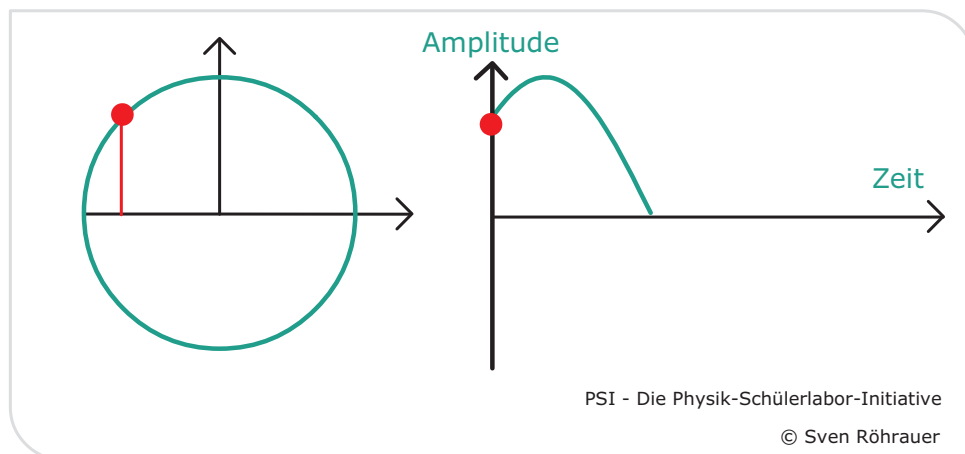
$$\varphi_3 = 135^\circ = \frac{3}{4} \cdot \pi$$

$$\varphi_4 = 180^\circ = \pi$$

Auch bei der Betrachtung von Wellen sind Zeigerdiagramme hilfreich.

Betrachten wir im Folgenden nun Licht als elektromagnetische Welle.

Greift man einen festen Ort der Welle heraus, so schwingt der Vektor des elektrischen Feldes, wie folgende Animation einer sich nach rechts ausbreitenden Welle zeigt.



Animation 5: Zeigerdiagramm am Beispiel einer Welle

Betrachtet man nun zwei sich überlagernde Wellen gleicher Frequenz sowie konstanter Phase und Amplitude, so kann die Amplitude der resultierenden Welle mit Hilfe des Zeigerdiagramms leicht berechnet werden, wie folgende zwei Beispiele zeigen:

Beispiel 1

Besteht zwischen den beiden Wellen (in blau und rot eingezeichnet) keine Phasendifferenz, so können die Amplituden (resultierende Welle in grün eingezeichnet) einfach addiert werden:

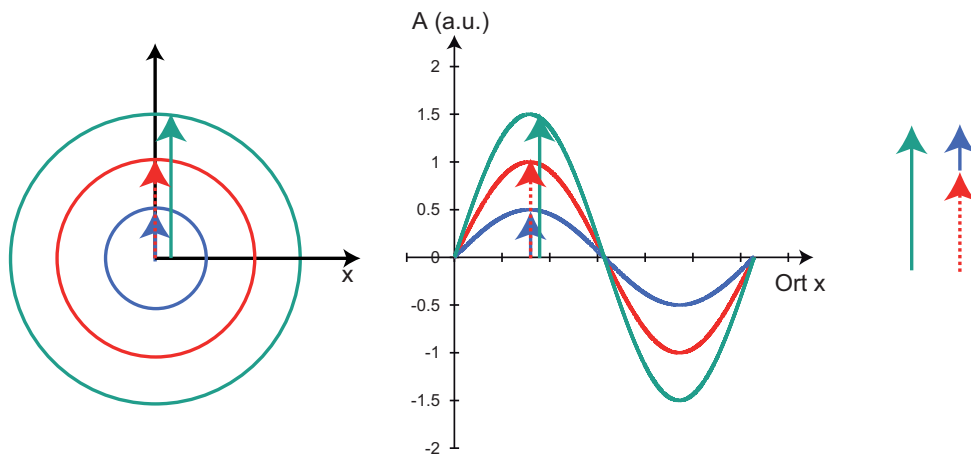


Abbildung 13: Addition der Zeiger für einen Phasenunterschied von $\Delta\varphi = 0$

Beispiel 2

Besteht zwischen zwei sich überlagernden Wellen (in blau und rot eingezeichnet) eine Phasendifferenz von $\Delta\varphi$ kann die Amplitude der resultierenden Welle (in grün eingezeichnet) leicht im Zeigerbild ermittelt werden:

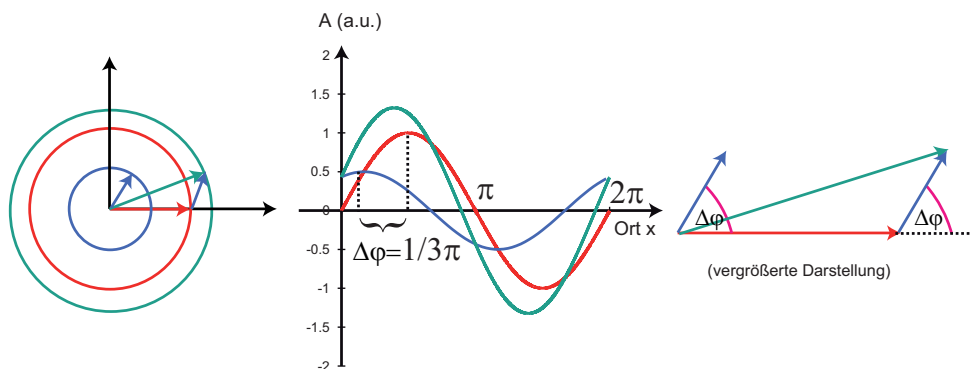


Abbildung 14: Addition der Zeiger für einen Phasenunterschied von $\Delta\varphi = 2/3\pi$

Die resultierende Amplitude erhält man also durch Vektoraddition der Zeiger.

L 8.1 Zusammenhang von Phasendifferenz und Gangunterschied

Im Bezug auf die Erklärung von Interferenzmustern ist der Zusammenhang von Phasendifferenz und Gangunterschied interessant.

Entspricht der Gangunterschied gerade einer Wellenlänge, so ist die Phasendifferenz 2π . Entspricht der Gangunterschied einer halben Wellenlänge, beträgt die Phasendifferenz π .

Allgemein gilt also folgender Zusammenhang zwischen Phasendifferenz und Gangunterschied:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\lambda} \cdot 2\pi \quad (19)$$